Equações Diferenciais Ordinárias

Lúcia de Fátima de Medeiros Brandão Dias

São Cristóvão/SE
2009

UNIVERSIDADE FEDERAL DE SERGIPE
Cidade Universitária Prof. "José Aloísio de Campos"
Av. Marechal Rondon, s/n - Jardim Rosa Elze
CEP 49100-000 - São Cristóvão - SE
Fone(79) 2105 - 6600 - Fax(79) 2105- 6474

Sumário

AULA

Equações Diferenciais Ordinárias (E.D.O.)

1

META:

Introduzir as definições preliminares referentes ao conteúdo Equações Diferenciais Ordinárias e dar motivações para o estudo dessas equações.

OBJETIVOS:

Ao fim da aula os alunos deverão ser capazes de:

Reconhecer e classificar uma Equação Diferencial Ordinária;

Compreender a importância prática de tais equações;

Identificar uma solução de uma Equação Diferencial Ordinária;

Entender o que é um estudo qualitativo de uma Equação Diferencial Ordinária.

PRÉ-REQUISITOS

Os conhecimentos de derivada e integrais de funções de valores reais com domínio em $\mathbb{R}$, da disciplina Cálculo I. Derivação implícita. Conhecimentos básicos sobre vetores e de gráficos de funções de uma variável.

1.1 Introdução

Caro aluno, seja bem-vindo a nossa primeira aula de Equações Diferenciais Ordinárias! Espero que juntos aprendamos um pouco sobre o universo dessas tão importantes equações. Na aula de hoje conheceremos o que é uma Equação Diferencial Ordinária (abreviaremos esse nome por E.D.O. de agora por diante), como estão divididas tais equações, algumas motivações práticas para seu estudo, o que é uma solução de uma E.D.O. e, por fim, conheceremos um pouco sobre a teoria qualitativa para E.D.O., atingindo assim o objetivo final para essa aula.

A história das Equações Diferenciais é tão antiga quanto a do cálculo diferencial, a qual data do século XVII. Desde o momento que os inventores do cálculo, Newton e Leibniz, tiveram o entendimento necessário sobre a derivada de uma função, esta começou a aparecer em equações e logo descobriu-se que as soluções para tais equações não eram tão simples assim. Algumas dessas soluções podiam ser obtidas por meio da antiderivada, mas a maioria das equações não podiam ser resolvidas por esse processo.

1.2 O que é uma E.D.O.?

Bem resumidamente, uma Equação Diferencial é uma equação que envolve derivadas. Melhor dizendo

Definição 1.1. Chamamos por Equação Diferencial (E.D.) uma equação que contém derivadas de uma ou mais variáveis dependentes em relação a uma ou mais variáveis independentes.

Exemplo 1.1.

1. $\dfrac{dx}{dt} + 3x = senx$; ($x$ é a variável dependente pois x é vista como função de t e t a variável independente)

2. $3\dfrac{dy}{dt} + x\dfrac{dx}{dt} = y + x$

3. $x\dfrac{dx}{dt} + \dfrac{dx}{ds} = 5$

Definição 1.2. Chamamos por Equação Diferencial Ordinária (E.D.O.) uma equação que contém derivadas de uma ou mais variáveis dependentes em relação a apenas uma variável independente.

Nos exemplos acima, os de número 1 e 2 apenas são E.D.O's. O exemplo 3 é conhecido como Equação Diferencial Parcial (E.D.P.), pois possue derivadas em relação a mais de uma variável independente.

O que é uma E.D.P.? Uma E.D.P. é uma equação que contém derivadas de uma ou mais variáveis dependentes em relação a DUAS OU MAIS variáveis independentes. Elas possuem a mesma classificação das E.D.O.'s.

Matematicamente falando podemos representar uma E.D.O em uma variável dependente na forma geral

$$F(x, y, y', y'', \cdot, y^{(n)}) = 0,$$

onde F é uma função de valores reais de $n+2$ variáveis, x é a variável independente, y é a variável dependente e $y', y'', \cdots, y^{(n)}$ são as derivadas de y com respeito a x até ordem n.

Em uma E.D.O. $F(x, y, y', y'', \cdots, y^{(n)}) = 0$, quando for possível expressar a derivada de ordem maior $y^{(n)}$ em função dos outros termos da equação, ou seja

$$y^{(n)} = f(x, y, y', y'', \cdots, y^{(n-1)})$$

dizemos que a E.D.O. está na sua forma normal.

Observação 1.1. 1. Admitiremos que, pelo menos localmente, toda E.D.O. pode ser escrita na sua forma normal.

2. Poderemos usar também a notação $\dfrac{d^n y}{dx^n}$ além de $y^{(n)}$ para representar a derivada de ordem n de y com respeito à x.

1.3 Classificação das Equações Diferenciais

As Equações diferenciais se classificam quanto ao tipo, a ordem e a linearidade. Quanto ao tipo elas podem ser Equações Diferenciais Ordinárias ou Equações Diferenciais Parcias. Estudaremos adiante a classificação com respeito as E.D.O.'s.

Quanto à ordem

A ordem de uma E.D.O. é dada pelo índice da maior derivada existente na equação. Por exemplo as equações

$$3xy''' + y'' + 3x^5y' = 5, (y')^5 + y'' = 0, y^{(5)} + 5xy^{(7)} + y' = 2$$

são equações de ordem 3, 2 e 7, respectivamente.

Quanto à linearidade

Uma E.D.O. de ordem n, $F(x, y, y', \cdot, y^{(n)}) = 0$, é dita linear se ela puder ser escrita na forma

$$a_n(x)y^{(n)} + a_{n-1}(x)y^{(n-1)} + \cdot + a_1(x)y' + a_0(x)y = g(x).$$

Exemplo 1.2. 1) $x^2y''' + y' = 7$ (E.D.O. linear)

2) $(sen\, x)y'' + y^{(4)} = lnx$ (E.D.O. linear)

3) $y\, y'' + y^{(4)} = lnx$ (E.D.O. não linear por causa do termo $y\, y''$)

4) $y^{(5)} + 3x^2\, y + lny = 0$ (E.D.O. não linaer devido ao termo $\ln y$).

1.4 Motivação

Por que estudar E.D.O.? As E.D.O.'s modelam problemas reais, tais como:

- Crescimento populacional
- Movimento de um pêndulo
- Propagação de doenças
- Lançamento e movimento de foguetes
- Movimento de corpos celestes
- Movimento de corpos em planos inclinados

- Corpos em movimento harmônico simples
- Decaimento radioativo
- Reações e misturas químicas
- Circuitos elétricos
- Corpos em queda

A seguir vamos conhecer mais de perto como as E.D.O.'s aparecem em alguns desses problemas.

A modelagem matemática é uma área do conhecimento que busca trazer para a linguagem matemática problemas muitas vezes reais a fim de estudá-los. É o que acontece, por exemplo, no estudo dos movimentos dos corpos celestes e na datação da idade de um fóssil.

Movimento de um corpo em um plano inclinado

Considere um corpo de massa m movendo-se, sem atrito, num plano inclinado, como mostra a figura abaixo Sabemos que a resul-
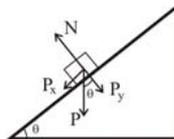
Figura 1.1: Corpo de massa m num plano inclinado.

tante das forças na direção y, dada por $F_{ry} = N - P_y = N - P\cos\theta$, é nula, uma vez que não há movimento na direção y. Contudo, a resultante na direção x, dada por $F_{rx} = P_x = P\,sen\,\theta$, não. Pela segunda Lei de Newton, sabemos que a força resultante que age em um corpo de massa constante é igual ao produto de sua massa por sua aceleração, ou seja, $F_r = m\,a$. Dessa maneira, como a força resultante que age no corpo de massa m no plano inclinado acima é $F_{rx} + F_{ry} = P\,sen\,\theta + 0 = mg\,sen\,\theta$ temos que o movimento desse

corpo é descrito pela equação

$$P\,sen\,\theta = m\,a_x = m\,x'',$$

onde x representa a posição do corpo, a_x representa a aceleração desse corpo na direção x, e $(')$ representa derivação com respeito ao tempo t. Assim, o movimento do corpo, sobre o plano inclinado, ao longo do tempo é dado pela solução da E.D.O.

$$x'' = gsen\,\theta.$$

Observação 1.2. 1- A aceleração de um corpo num instante de tempo t é conhecida como a taxa de variação da velocidade desse corpo ao longo do tempo, ou seja, $a = \dfrac{dv}{dt}$ e como a velocidade num instante de tempo t é a taxa de variação da posição desse corpo ao longo do tempo, temos que $a = \dfrac{d^2x}{dt^2}$, onde v e x representam, respectivamente, a velocidade e a posição do corpo.
2- No problema acima, se $\theta = 0$, o corpo estará em repouso na horizontal (considerando a velocidade inicial nula). Se $\theta = 90^o$, o corpo estará em queda livre.

Movimento de um pêndulo simples

Considere o pêndulo abaixo
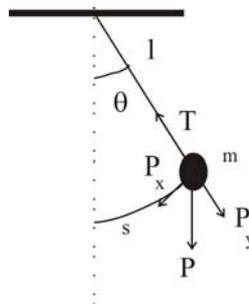
Figura 1.2: Pêndulo simples.

Consideremos s a medida do arco formado pelo pêndulo (deslocamento do pêndulo) quando este forma com a linha vertical um ângulo θ, como mostra a figura acima. Sabemos que $s = l\theta$, onde l é o comprimento do fio do pêndulo. Assim a aceleração do pêndulo ao longo do tempo t é dada por $a = \dfrac{d^2s}{dt^2} = l\,\dfrac{d^2\theta}{dt^2}$.

A força resultante na direção y é nula, uma vez que a tração, T, no fio é igual a componente da força peso P na direção y. Contudo, a força resultante na direção x não é nula e é dada por $-mg\,sen\,\theta$, (o sinal negativo é porque essa força resultante é uma força restauradora). Assim, da segunda Lei de Newton, obtemos que $-mgsen\,\theta = ml\dfrac{d^2\theta}{dt^2}$ ou melhor

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} = -\frac{g}{l}sen\,\theta.$$

Portanto, para descrevermos o movimento desse pêndulo ao longo do tempo, basta-nos achar a solução dessa E.D.O..

Sistema massa-mola (Movimento Harmônico simples).

O Movimento Harmônico simples- M.H.S.- é um movimento oscilatório que se caracteriza pela ação de forças restauradoras do tipo elásticas.

Considere a figura abaixo onde descrevemos o movimento de um corpo de massa m presso a uma mola com constante de elasticidade k.
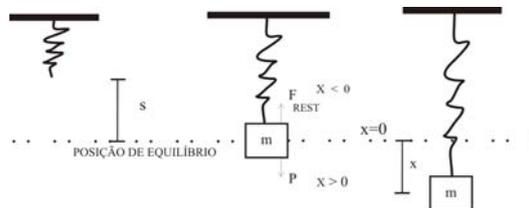
Figura 1.3: Sistema massa-mola.

A mola, a princípio se encontra sem nenhum corpo presso a ela. Quando prendemos o corpo de massa m, a mola se distende s unidades de comprimento (**Lei de Hooke**) e o corpo fica parado, ou seja, o sistema massa-mola está na sua posição de equilíbrio. Nesse estado temos a igualdade entre a força peso e a força restauradora da mola que, matematicamente, é descrita pela equação

$$ks = mg.$$

Se deslocarmos para baixo a massa m por uma quantidade x de sua posição de equilíbrio e soltarmos temos, pela segunda lei de Newton que

$$F_r = m\,a,$$

onde F_r é a força resultante agindo na massa m, a qual nesse caso será a diferença entre a força peso e a força restauradora da mola, ou seja, $F_r = mg - k(s + x)$. Dessa maneira a equação $F_r = m\,a$ assume a forma

$$mg - k(x + s) = m\ddot{x}.$$

Como g e s são constantes, obtemos uma equação diferencial ordinária linear de segunda ordem dada por

$$\ddot{x} = -\frac{k}{m}x,$$

uma vez que $ks = mg$.

Lei de Hooke (1635-1703)A força restauradora exercida pela mola é proporcional à distenção da mola. Esta força é oposta à direção do alongamento.

O campo de aplicações para as E.D.O.'s é imenso, poderíamos ficar aqui listando inúmeros modelos matemáticos onde tais equações aparecem, mas optamos por falar mais deles adiante, quando tivermos exposto algumas técnicas de resolução de E.D.O.'s.

1.5 Definições e terminologia

Definição 1.3. Uma solução de uma E.D.O. de ordem n é uma função ϕ definida em um intervalo $I \subset \mathbb{R}$ a qual tem pelo menos n derivadas contínuas em I e que satisfaz a E.D.O. dada.

Por exemplo, considere a E.D.O., $F(x, y, y', \cdots, y^{(n)}) = 0$, uma solução dessa E.D.O. é uma função ϕ definida em um intervalo $I \subset \mathbb{R}$ que tem pelo menos n derivadas contínuas em I tal que $F(x, \phi(x), \phi'(x), \cdots, \phi^{(n)}(x)) = 0$, para todo $x \in I$.

Observação 1.3. O intervalo de definição de uma solução é algo que merece cuidado, pois em geral confunde-se domínio de uma função com intervalo de definição de uma solução. Por exemplo, a função $y = \frac{1}{x}$ é solução da E.D.O. $xy' + y = 0$ para x pertencente a qualquer intervalo dos números reais que não contém o zero, como por exemplo, $(0, \infty)$. Contudo, $y = \frac{1}{x}$ como função está definida em $\mathbb{R}^*$.

Exemplo 1.3. A função y dada por $y(x) = \frac{x^4}{16}, x \in \mathbb{R}$ é solução da E.D.O. $4y' - x^3 = 0$ uma vez que é diferenciável em $\mathbb{R}$ e satisfaz a E.D.O. dada, vamos verificar?

Derivando y com respeito a x, obtemos $y' = x^3/4$. Substituindo em $4y' - x^3$ segue que $4y' - x^3 = 0$.

Mas será que essa é a única solução? Observe que toda expressão da forma $y = \frac{x^4}{16} + c, c \in \mathbb{R}$ é uma solução para essa E.D.O.. Quando isso acontece dizemos que a E.D.O. possue uma **família de soluções** a um parâmetro, que nesse caso é c.

Observação 1.4.

1. Uma solução de uma E.D.O. identicamente nula no seu intervalo de definição I é chamada **solução trivial**.

2. Em geral, uma E.D.O. possue um número infinito de soluções.

3. Podemos ter soluções de uma E.D.O. que não veem de uma família de soluções dessa E.D.O.. Como por exemplo, a E.D.O. $\frac{dy}{dx} = y^2 - 4$ possue a seguinte família de soluções $y(x) = 2\frac{(1+ce^{4x})}{(1-ce^{4x})}, c \in \mathbb{R}$, contudo $\widetilde{y}(x) = -2$ é solução dessa E.D.O. e não provém dessa família, uma vez que não existe valor do parâmetro c tal que $y(x) = \widetilde{y}(x) = -2$.

4. Quando uma solução de uma E.D.O. vem de uma família de soluções encontrada, a denominamos **solução particular** da E.D.O. dada.

5. (**Solução implícita**)- Nem sempre encontraremos a solução de uma E.D.O. em sua forma explícita, $y = \phi(x)$. As soluções de algumas E.D.O.'s, quando for possível acharmos tais soluções, em geral serão dadas na forma $G(x, y) = 0$, a qual define implicitamente a solução. Por exemplo, $G(t, E, c) = 0$, onde $G(t, E) = c - t + E - sen\, E$ é uma família de soluções implícitas (a um parâmetro) da E.D.O. $\frac{dE}{dt} = \frac{1}{1-\cos E}$. (para verificar derive implicitamente com respeito a t a expressão $G(t, E) = 0$)

   Um outro exemplo, considere $G(x, y) = 0$, onde $G(x, y) = x^2 + y^2 - 4$ e $-2 < x < 2$ é uma solução ímplicita da E.D.O. $\frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y}$.

6. Dada uma E.D.O.

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y),$$

   uma solução da forma $\phi(x) = c, c \in \mathbb{R}$ é dita **solução de equilíbrio** da E.D.O. dada se $f(x, \phi) = 0$.

Por exemplo, $\phi(x) = 2$ é solução de equilíbrio da E.D.O.

$$\frac{dy}{dx} = y^2 - 4.$$

Definição 1.4. O gráfico de uma solução ϕ de uma E.D.O. é chamado de **curva integral**. Uma vez que ϕ é diferenciável em seu intervalo de definição I, sua curva integral é contínua em I.

Abaixo descrevemos algumas curvas integrais da família de soluções do Exemplo 1.3.
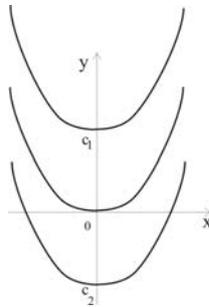
Figura 1.4: Parte de algumas curvas integrais de $y' = x^3/4$.

1.6 Equações Diferenciais Ordinárias e o Teorema Fundamental do Cálculo

Um problema básico do Cálculo Integral é a determinação do valor da integral definida

$$\int_{\alpha}^{\gamma} f(x)dx$$

de uma função $f : [\alpha, \gamma] \to \mathbb{R}$.

Quando f é contínua e não negativa podemos relacionar o conceito de integral definida com a idéia de área

O Teorema Fundamental do Cálculo interliga os conceitos de integral e derivada e nos mostra uma maneira de resolver algumas

Teorema Fundamental do Cálculo- Parte I: Seja $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ uma função contínua. A função $F : [a, b] \to \mathbb{R}$ definida pela expressão

$$F(x) = \int_{a}^{x} f(x)dx \quad (1.1)$$

é derivável e $F'(x) = f(x)$ para todo $x \in (a, b)$.
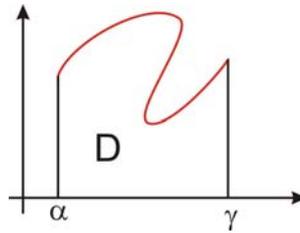
Figura 1.5: R é a área abaixo do gráfico da função f.

integrais definidas.

Observe que a função F definida em (1.1) é uma solução da equação diferencial

$$\frac{dy}{dx} = f(x). \tag{1.2}$$

As soluções dessa E. D. O. são chamadas as primitivas de f. Nesse caso dizemos que a E.D.O. foi resolvida por quadratura, ou seja, foi possível achar uma primitiva para a função f.

Toda a parte do Cálculo chamada de cálculo de primitivas nada mais é do que a determinação de soluções da equação diferencial (1.2) para diferentes funções f. Assim, o problema de resolvermos uma integral, ou seja, acharmos uma primitiva, é equivalente ao problema de resolvermos uma E.D.O.. Como sabemos do Cálculo, uma vez que nem toda função possui primitiva, nem toda E.D.O. possuirá solução dada explicitamente.

O número de equações que podem ser resolvidas em termos de funções elementares (ou por quadratura) é muito pequeno, mesmo depois da introdução de funções representadas por integrais, como é o caso das funções elípticas. Segundo, Figueiredo (2007) essa constatação gerou a busca de novos métodos e surgiu assim o uso de séries de funções na resolução de uma E. D. O., o Teorema

de Existência e Unicidade de soluções, a teoria qualitativa, a qual se preocupa em extrair o máximo de informações possíveis sobre a solução de uma E.D.O. sem conhecer explicitamente a solução da mesma e métodos numéricos. Na seção seguinte daremos um exemplo de um estudo qualitativo de uma E.D.O..

1.7 Exemplo de um estudo qualitativo de uma E.D.O.

O matemático Henri Poincaré foi uma das grandes mentes pensantes da matemática de sua época e porque não dizer da história dessa ciência até então. Suas pesquisas foram e são de grande importância em várias áreas da matemática, tais como: análise, álgebra, geometria e teoria dos números. Ele foi o grande precursor da teoria qualitativa para E.D.O.'s não linear e suas idéias nessa área contribuíram para uma nova maneira de abordar muitos dos problemas em mecânica celeste.

Consideremos uma E.D.O. de 1^a ordem na sua forma normal

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y) \tag{1.3}$$

Suponhamos que não seja possível encontrar a solução dessa E.D.O., por métodos analíticos. Quando nos deparamos com problemas assim e tentamos obter informações sobre as soluções diretamente da própria E.D.O. dada, estamos realizando um estudo qualitativo das equações do problema.
Sabemos do cálculo que a derivada $\dfrac{dy}{dx}$ de uma função diferenciável $y = y(x)$ nos dá a inclinação da reta tangente em um ponto (x, y) sobre o gráfico da tal função. Assim, tomemos um ponto (x_0, y_0) sobre a curva integral de uma solução de (1.3), o valor $f(x_0, y_0)$ nos dá a inclinação da reta tangente a curva integral no ponto (x_0, y_0), uma vez que $\frac{dy}{dx} = f(x, y)$, ou melhor dizendo, nos dá a inclinação de um segmento de reta, denominado elemento linear, tangente a curva integral no ponto (x_0, y_0). Por exemplo, consideremos a equação

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{y}{x},$$

onde $f(x, y) = -\dfrac{y}{x}$. No ponto $(4, 7)$, por exemplo, a inclinação do

elemento linear é $f(4,7) = -7/4$. A figura abaixo nos mostra a representação desse elemento linear na curva integral da solução.
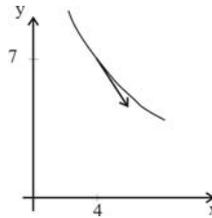
Figura 1.6: Elemento linear na curva integral.

Definição 1.5. Considere a E.D.O.(1.3) e calcule todos os valores de $f(x,y)$ sobre uma malha retangular de pontos (x,y) no plano xy. Para cada ponto dessa malha, associe um vetor (ou um elemento linear) com inclinação $f(x,y)$. A coleção de todos esses vetores será chamada de **campo de direções** de (1.3). É por esta razão que dada uma E.D.O. como (1.3) chamamos muitas vezes a função $f(x,y)$ de campo associado a E.D.O. dada.

No caso da E.D.O., $\dfrac{dy}{dx} = -\dfrac{y}{x}$, temos o seguinte campo de vetores
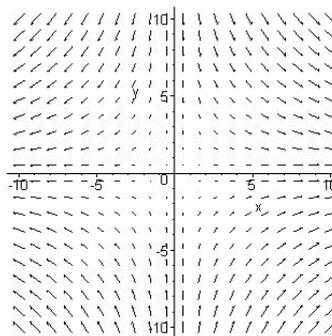
Figura 1.7: Campo de vetores.

Visualmente, o campo de direções de uma E.D.O. sugere a aparência ou forma de uma família de curvas integrais dessa E.D.O.. As-

sim, podemos responder perguntas como, existe soluções periódicas ou existe soluções que crescem ou diminuem indefinidamente (soluções de escape) sem que conheçamos de fato a expressão da família de soluções.

1.8 Conclusão

As Equações Diferenciais estão muito presentes no nosso dia a dia e, em particular, as Equações Diferenciais Ordinárias. Com o auxílio das leis da Fisíca descobriu-se uma infinidade de aplicações para essas equações. Infelizmente, nem toda E.D.O. possui uma solução dada explicitamente. Isso fez com que surgissem técnicas que nos dessem informações sobre as soluções sem que necessariamente tivéssemos suas expressões algébricas, essas técnicas estão inseridas no que chamamos de Estudo Qualitativo das E.D.O.´s. O matemático Henri Poincaré foi o precursor desse estudo.

RESUMO

..

Na aula de hoje vimos o que são Equacões Diferenciais Ordinárias, como se classificam e como estão relacionadas com outras ciências. Vimos também o que é uma solução de uma E.D.O., que as soluções de uma E.D.O. podem ser dadas de maneira explícita (quando conhecemos sua expressão algébrica) ou de maneira implícita. Vimos o que são soluções de equilíbrio, solução particular e curva integral. Aprendemos que uma E.D.O., em geral, não possui apenas uma solução e como o conceito de solução de uma E.D.O. está ligado ao cálculo de primitivas de uma função, termo que vem lá do Cálculo Integral. Vimos que para se resolver o problema de não se poder obter uma solução explícita para toda E.D.O. pode-se usar as ferramentas da teoria qualitativa, onde é possível obter informações sobre a solução de uma E.D.O. sem que conheçamos sua expressão algébrica.

PRÓXIMA AULA

..

Em nossa próxima aula veremos o que é um problema de valor inicial ou problema de Cauchy e quais as condições para que uma E.D.O. tenha solução única passando por um ponto.

ATIVIDADES

..

Atividade. 1.1. Classifique as equações diferencias abaixo quanto ao tipo, ordem e linearidade.

a)$3x^2y^{(4)} + (y')^6 = 1.$

b)$3x\dfrac{dy}{dx} + \dfrac{dz}{dx} = x^5.$

c)$(lnx)\dfrac{d^3x}{dt^3} + 5\dfrac{dx}{dt} - x = 0.$

d) $(1-x)y'' - 4xy' + 5y = \cos x.$

e)$x\dfrac{d^3y}{dx^3} - 2\left(\dfrac{dy}{dx}\right)^4 + y = 0.$

f) $yy' + 2y = 1 + x^2.$

g) $x^2dy + (y - xy - xe^x)dx = 0.$

h) $\dfrac{dx}{dt} + 3x\dfrac{dy}{ds} + 1 = 90.$

Atividade. 1.2. Verifique que a função $g(x) = c_1\cos(4x) + c_2 sen\,(4x), c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ é uma família de soluções da E.D.O.

$$y'' + 16y = 0.$$

Atividade. 1.3. Verifique que uma família a um parâmetro de soluções para

$$y = xy' + (y')^2 \text{ é } y = cx + c^2.$$

Determine um valor de k para que $y = kx^2$ seja uma solução particular para a equação diferencial.

Atividade. 1.4. Encontre uma solução de equilíbrio das E.D.O.'s

a) $y' = 8xy$

b) $\dfrac{dx}{dt} = (1-t^2)(1-x^2)$

Atividade. 1.5. Mostre que $y_1 = 2x+2$ e $y_2 = -x^2/2$ são ambas soluções de

$$y = xy' + (y')^2/2.$$

As funções, c_1y_1 e c_2y_2 onde $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ são também soluções? Desenhe as curvas integrais.

Atividade. 1.6. Em certas circunstâncias, um corpo B de massa m em queda encontra resistência do ar proporcional à sua velocidade v. Use a segunda lei de Newton para encontrar a equação diferencial para a velocidade v do corpo em qualquer instante. Lembre-se de que a aceleração é $a = dv/dt$. Suponha neste caso que a direção positiva é para baixo. Depois classifique a equação encontrada.

LEITURA COMPLEMENTAR

¨

FIGUEIREDO, Djairo Guedes, Equações Diferenciais Aplicadas. Coleção matemática universitária. IMPA, 2007.

SOTOMAYOR, Jorge, Lições de equações diferenciais ordinárias. IMPA.

ZILL, Dennis G., Equações Diferenciais com aplicações em modelagem. Thomson, 2003.

1.9 Referências Bibliográficas

FIGUEIREDO, Djairo Guedes, Equações Diferenciais Aplicadas. Coleção matemática universitária. IMPA, 2007.

ZILL, Dennis G., Equações Diferenciais com aplicações em modelagem. Thomson, 2003.